

B

I DIAGRAMMI DI BODE

- B.1* *Diagramma del modulo*
- B.2* *Diagramma della fase*

La funzione di trasferimento di un circuito elettronico, in generale scrivibile nella forma

$$T(s) = g \frac{(s - z_1) \dots (s - z_h)}{(s - p_1) \dots (s - p_k)} = A \frac{(s/z_1 - 1) \dots (s/z_h - 1)}{(s/p_1 - 1) \dots (s/p_k - 1)},$$

riassume in forma analitica le caratteristiche elettriche del circuito stesso (guadagno, poli, zeri) e permette di calcolare la risposta del circuito ad un *qualunque* segnale forzante. Tuttavia molto spesso ci si limita a selezionare come segnale forzante, perché più intuitivo e sperimentalmente più conveniente, una semplice sinusoidale. In questo caso, il segnale forzante non è individuato da un punto qualsiasi $s = \alpha + j\omega$ sul piano complesso (piano di Gauss) ma dal sottoinsieme di punti $s = \pm j\omega$ che stanno lungo l'asse ad $\alpha = 0$. Il valore della funzione di trasferimento corrispondente a questi punti, che indicheremo con $T(j\omega)$, corrisponde effettivamente alla $T(s)$ lungo l'asse $y = j\omega$:

$$T(j\omega) = g \frac{(j\omega - z_1) \dots (j\omega - z_h)}{(j\omega - p_1) \dots (j\omega - p_k)} = A \frac{(j\omega/z_1 - 1) \dots (j\omega/z_h - 1)}{(j\omega/p_1 - 1) \dots (j\omega/p_k - 1)}$$

Essendo anch'essa una funzione complessa, di essa sarà utile studiare il valore del modulo (portatore dell'informazione del guadagno del circuito) e della fase (portatrice dell'informazione dello sfasamento tra la sinusoidale di uscita e quella di ingresso). La rappresentazione grafica di queste due caratteristiche della funzione $T(j\omega)$ riportata in funzione della pulsazione ω della forzante è usatissima per la sua

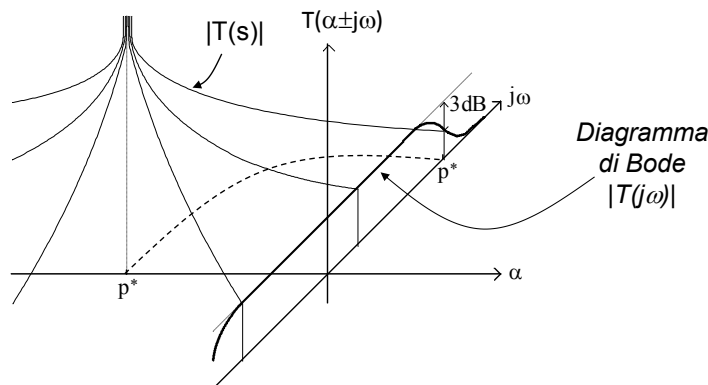


Fig. B.1 Rappresentazione grafica di una funzione di trasferimento $|T(s)|$ e di $|T(j\omega)|$.

efficacia e chiarezza ed è nota come “Diagrammi di Bode” della funzione di trasferimento di $T(s)$.

Nel seguito quindi vediamo in dettaglio come operare per giungere a dei grafici precisi ed efficaci dell'andamento in frequenza della risposta di un circuito elettronico.

Supponiamo, per fissare le idee, che la $T(s)$ abbia la costellazione di poli e zeri riportata in Fig. B.1. Scelto un qualunque valore $\bar{s}=j\omega$, il modulo di $T(j\omega)$ è dato da

$$|T(j\omega)| = |T(\bar{s})| = |g| \frac{|\bar{s} - z_1| \dots |\bar{s} - z_h|}{|\bar{s} - p_1| \dots |\bar{s} - p_k|}$$

Questa espressione mette in evidenza come $|T(j\omega)|$ sia il rapporto delle lunghezze dei vettori riportati in Fig. B.1. Riportando $|T(j\omega)|$ in diagramma bilogarithmico, si ha

$$\begin{aligned} |T(j\omega)|_{\text{dB}} &= 20\log|g| + 20\log|j\omega - z_1| \dots - 20\log|j\omega - p_1| \dots = \\ &= 20\log|A| + 20\log|j\omega/z_1 - 1| \dots - 20\log|j\omega/p_1 - 1| \dots \end{aligned} \quad (\text{B.1})$$

Per quanto riguarda la fase

$$\arg(T(j\omega)) = \arg(g) + \arg(j\omega - z_1) \dots - \arg(j\omega - p_1) \dots \quad (\text{B.2})$$

dove, a parte $\arg(g)$, gli altri termini sono gli angoli rispettivamente formati da ciascun vettore in Fig. B.2 con l'asse positivo delle ascisse.

Sia la (B.1) che la (B.2) sono additive, nel senso che sia il modulo che l'argomento di $T(j\omega)$ sono pari alla somma algebrica dei contributi dovuti agli zeri ed ai poli. Quindi, se si è in grado di ricavare il contributo elementare dovuto ad uno zero e ad un polo, si riesce a tracciare i diagrammi sia del modulo che della

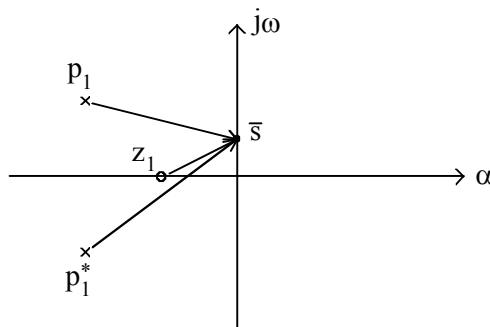


Fig. B.1 Costellazione di poli e zeri nel piano di Gauss. (x) polo, (o) zero.

fase di $T(j\omega)$.

Le singolarità di una rete (poli e zeri) possono essere o reali o complesse coniugate. Discutiamo separatamente il contributo di singolarità reali e di singolarità complesse coniugate prima al diagramma del modulo di $T(j\omega)$ e poi a quello della sua fase.

B.1 DIAGRAMMA DEL MODULO

a) Contributo di singolarità reali

In corrispondenza di un polo o uno zero reale $s=q$, nella (B.1) compare un termine del tipo $20\log|j\omega/q - 1|$. Il contributo di questi termini al modulo ed alla fase è

$$20\log\left|\frac{j\omega}{q} - 1\right| = 20\log\sqrt{1 + \frac{\omega^2}{|q|^2}} \quad (B.3)$$

Per $\omega \ll |q|$, $20\log|j\omega/q - 1|$ tende asintoticamente a 0dB. Analogamente, per $\omega \gg |q|$:

$$20\log|j\omega/q - 1| \rightarrow 20\log\omega - 20\log|q| \quad (B.4)$$

che in diagramma bilogaritmico è una retta con pendenza 20dB/decade ed intersecante l'asse a 0dB per $\omega=|q|$. Lo scostamento tra il diagramma asintotico ed il valore esatto di $20\log|j\omega/q - 1|$ è massimo per $\omega=|q|$ dove $20\log|j\omega/q - 1|$ vale $20\log\sqrt{2}=3\text{dB}$.

Il segno con cui il termine dato dalla (B.3) interviene nel $|T(j\omega)|$ è positivo

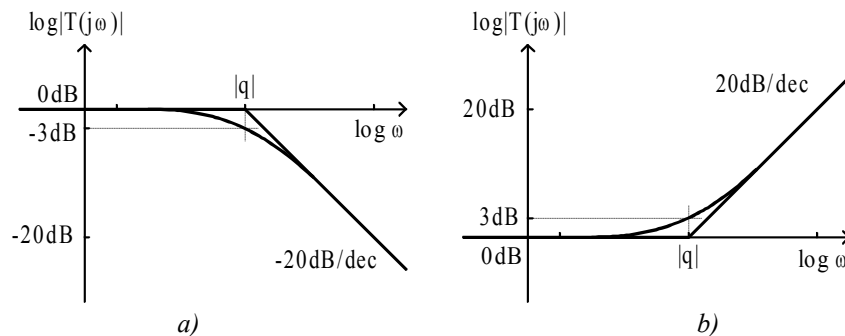


Fig. B.2 Contributi a $|T(j\omega)|$ dovuti a singolarità reali: a) polo; b) zero.

o negativo a seconda che si tratti di uno zero o di un polo. In definitiva, una singolarità reale contribuisce a $|T(j\omega)|$ con gli andamenti della Fig. B.2.

b) Contributo di singolarità complesse coniugate

Si consideri ora una coppia di poli complessi coniugati, q_1 e q_2 . Risulta $|q_1|=|q_2|=|q|$. Essi determinano in $T(s)$ la presenza di un trinomio di secondo grado al denominatore

$$T(s) = g \frac{(s - z_1) \dots}{\dots (s^2 + 2\alpha s + |q|^2) \dots},$$

dove $\alpha = -\text{Re}(q_1)$. Il fattore di forma della coppia di poli è $\xi = -\text{Re}(q_1)/|q|$. Per rappresentare graficamente $|T(j\omega)|$ non conviene sviluppare i trinomi corrispondenti a singolarità complesse coniugate, ma porre invece il trinomio nella forma

$$T(s) = A \frac{(s/z_1 - 1) \dots}{\dots (s^2/|q|^2 + 2\xi s/|q| + 1) \dots}.$$

Quindi

$$|T(j\omega)|_{dB} = \dots - 20 \log \left| \left(1 - \frac{\omega^2}{|q|^2} \right) + \frac{2j\xi\omega}{|q|} \right| \dots$$

Studiamo quindi il contributo di termini del tipo

$$20 \log \left| \left(1 - \frac{\omega^2}{|q|^2} \right) + \frac{2j\xi\omega}{|q|} \right| = 20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{|q|^2} \right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{|q|} \right)^2} \quad (B.5)$$

Per $\omega \ll |q|$, la (B.5) è ancora asintotica al valore 0dB. Invece, per $\omega \gg |q|$ nella (B.5) prevale il termine con ω^4 sotto il radicale. Quindi si ha:

$$20 \log \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{|q|^2} \right)^2 + \left(\frac{2\xi\omega}{|q|} \right)^2} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 40 \log \frac{\omega}{|q|}$$

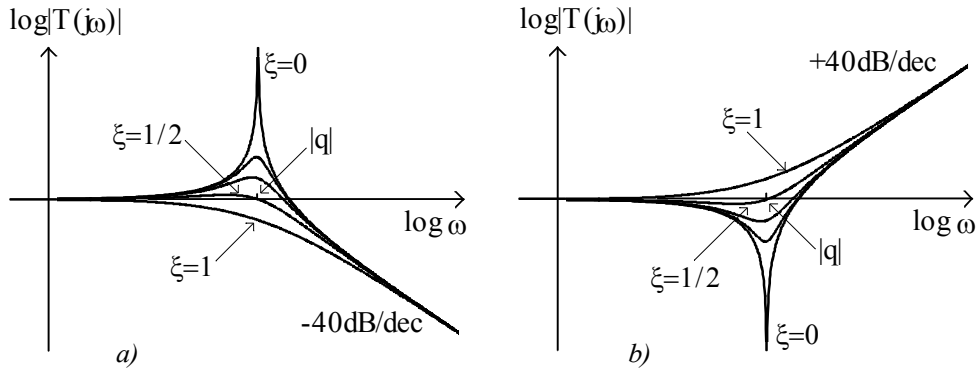


Fig. B.3 Contributi a $|T(j\omega)|$ dovuti a singolarità complesse coniugate: a) polo; b) zero.

che, in diagramma bilogaritmico, è una retta con pendenza 40 dB/decade ed intersecante l'asse a 0 dB per $\omega = |q|$. Il maggior scostamento tra il diagramma asintotico e il diagramma reale si ha ancora per $\omega = |q|$, dove la (B.5) vale $20 \log(2\xi)$. Per cui, se il fattore di forma della coppia è $\xi = 1$, ovvero le singolarità sono reali e coincidenti, $20 \log(2\xi)$ vale $20 \log 2 = 6 \text{ dB}$. Si ha esattamente il doppio dello scostamento dovuto ad una sola singolarità reale. Se invece $\xi = 1/2$, le singolarità sono sulle bisettrici dei quadranti del piano di Gauss, $20 \log(2\xi)$ vale 0 , e quindi anche il diagramma reale passa per il punto $\omega = |q|$. Se $\xi = 0$, le singolarità sono immaginarie coniugate e quindi $20 \log(2\xi) \rightarrow -\infty$. Il contributo al diagramma di $|T(j\omega)|$ dato da singolarità complesse coniugate è riportato nella Fig. B.3. In definitiva il termine (B.5) contribuisce a $|T(j\omega)|$ preceduto da un segno positivo o negativo a seconda che esso sia dovuto a zeri o a poli complessi coniugati.

Sovrapponendo gli andamenti riportati nelle figure B.2 e B.3, è possibile tracciare il diagramma di $|T(j\omega)|$ di una qualsiasi rete. In genere, il diagramma costruito sovrapponendo solo gli andamenti asintotici dei contributi a $|T(j\omega)|$ è detto **diagramma di Bode**. Esso è quindi caratterizzato da andamenti a spezzata. Invece, il diagramma accurato dell'andamento di $|T(j\omega)|$ è generalmente indicato come diagramma della risposta in frequenza della rete elettrica.

E B.1 Tracciare il diagramma di $|T(j\omega)|$ della rete dell'esercizio E A.10 al variare del valore della resistenza R.

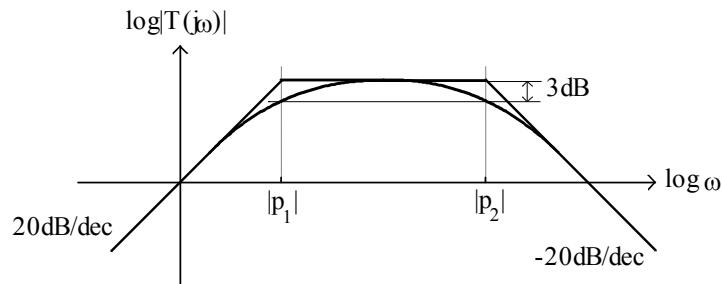
La funzione di trasferimento della rete è data dalla (A.11) e quindi

$$|T(j\omega)| = \frac{|g|}{p_1 p_2} \frac{\omega}{|j\omega/p_1 - 1| |j\omega/p_2 - 1|}$$

dove $g=1/C$ e $p_1 p_2=1/LC$. Ovvero

$$|T(j\omega)|_{dB} = 20 \log \frac{|g|}{p_1 p_2} + 20 \log \omega - 20 \log \left| \frac{j\omega}{p_1} - 1 \right| - 20 \log \left| \frac{j\omega}{p_2} - 1 \right|.$$

E' facile verificare che il termine $20 \log(\omega)$, dovuto allo zero in $s=0$, è un caso particolare della retta (B.2) per $q|=0$. Il diagramma asintotico di $|T(j\omega)|$ nel caso di poli reali distinti è riportato nella figura successiva.



Lo zero nell'origine determina un contributo iniziale crescente con 20dB/decade. Per $\omega=|p_1|$ questa pendenza è compensata dalla pendenza di -20dB/decade dovuta al primo polo. Quindi, per $\omega=|p_2|$ interviene l'ulteriore contributo dovuto al secondo polo che porta la pendenza asintotica del diagramma a -20dB/decade . Il vero diagramma di $|T(j\omega)|$ è 3dB più basso del diagramma asintotico per $\omega=|p_1|$ ed $\omega=|p_2|$.

Si ricavi il diagramma di Bode della rete nel caso di poli reali coincidenti.

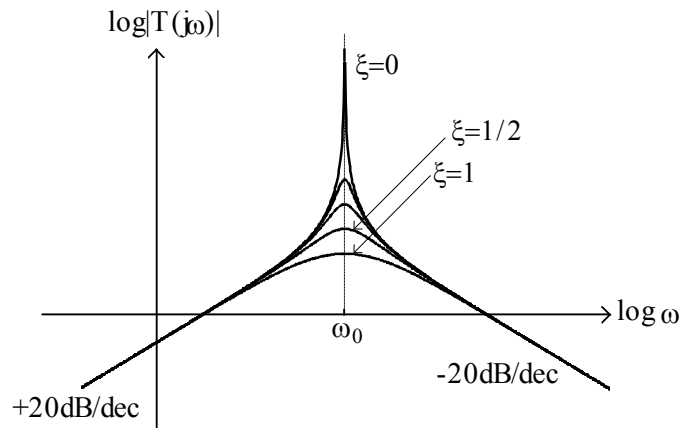
Tracciamo ora il diagramma di Bode nel caso in cui i poli siano complessi coniugati. La funzione di trasferimento della rete può essere scritta come:

$$T(s) = \frac{g}{\omega_0^2} \frac{s}{(s^2/\omega_0^2 + 2\xi s/\omega_0 + 1)},$$

dove $\omega_0^2=p_1 p_2=1/LC$ e ξ è il fattore di forma della coppia di poli. Il diagramma di $|T(j\omega)|$ è riportato nella figura successiva. Lo zero reale nell'origine determina sempre, in base alla (B.4), un contributo iniziale crescente con 20dB/decade. Per $\omega \gg \omega_0$, la pendenza del diagramma asintotico diventa -20dB/decade a causa del

contributo -40dB/decade della coppia di poli complessi coniugati. Per $\omega=\omega_0$, il valore di $|T(j\omega)|$ dipende dal fattore di forma dei poli.

I diagrammi riportati mettono in evidenza come la rete risonante in esame privilegi il trasferimento delle componenti armoniche limitate in una banda (come nel caso di poli reali) o risonanti con $\omega=\omega_0$. La rete ha, quindi, le caratteristiche di un filtro passa banda, tanto più selettivo quanto più è piccolo il fattore di forma ξ dei poli. Per esprimere la selettività del filtro è comodo introdurre il fattore $Q=1/(2\xi)$, detto **fattore di qualità** della coppia di poli. Giacché Q è inversamente proporzionale a ξ , esso aumenta all'aumentare della parte immaginaria dei poli e quindi all'aumentare della selettività del filtro attorno alla frequenza centrale ω_0 .



In generale una rete risonante con un alto valore di Q è una rete estremamente selettiva.

La selettività in frequenza manifestata dalla rete risonante analizzata può essere compresa intuitivamente se si considera che un segnale sinusoidale può persistere nella rete solo se esso è risonante con lo scambio di energia tra il condensatore e l'induttore. Questo scambio è caratterizzato dalla pulsazione ω_0 . La selettività per le frequenze prossime ad ω_0 è quindi la traduzione nel dominio delle frequenze di questa caratteristica energetica della rete LC.

B.2 DIAGRAMMA DELLE FASI

a) Contributo di singolarità reali

Consideriamo ora il diagramma dello sfasamento. Il contributo di una singolarità reale all'argomento di $T(j\omega)$ è pari a:

$$\arg\left(\frac{j\omega}{q} - 1\right) = \text{arctg}\left(-\frac{\omega}{q}\right). \quad (\text{B.6})$$

Graficamente, la (B.6) è l'angolo formato dal vettore $(j\omega - q)$ con l'asse positivo delle ascisse (cfr. Fig. B.4). Quindi, se la singolarità è nel semipiano sinistro, la (B.6) vale 0 per $\omega \ll |q|$, $\pi/4$ per $\omega = |q|$, e $\pi/2$ per $\omega \gg |q|$. Se la singolarità è reale positiva, allora la (1.45) vale π per $\omega \ll |q|$, $3\pi/4$ per $\omega = |q|$ e $\pi/2$ per $\omega \gg |q|$. La transizione tra i valori asintotici avviene nell'intervallo $|q|/10 < \omega < 10|q|$.

b) Contributo di singolarità complesse coniugate

Nel caso di singolarità complesse coniugate con fattore di forma ξ e modulo $|q|$, si ha:

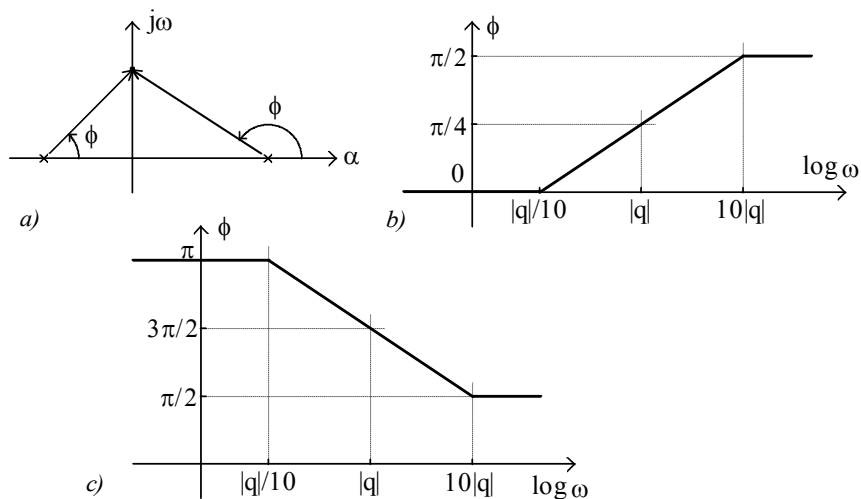


Fig. B.4 Contributo allo sfasamento dovuto ad una singolarità reale: a) rappresentazione grafica nel piano di Gauss; b) sfasamento dovuto ad una singolarità reale negativa; c) sfasamento dovuto ad una singolarità reale positiva.

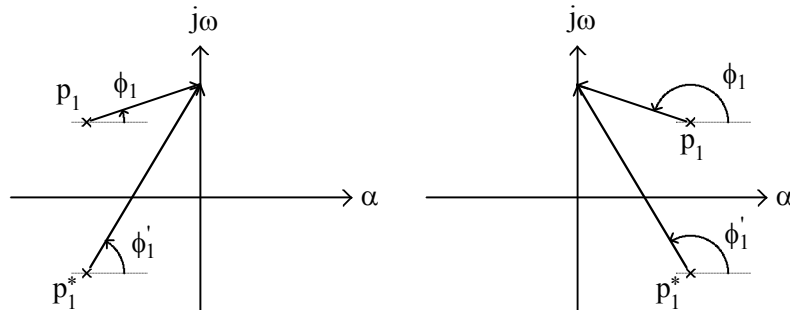


Fig. B.5 Rappresentazione grafica nel piano di Gauss dello sfasamento dovuto a singolarità complesse coniugate.

$$\arg \left[1 - \left(\frac{\omega}{|q|} \right)^2 + \frac{2j\xi\omega}{|q|} \right] = \arctg \left[\frac{2\xi\omega/|q|}{1 - (\omega/|q|)^2} \right]. \quad (\text{B.7})$$

Graficamente la (B.7) è la somma degli angoli indicati in Fig. B.4.

Se le singolarità hanno parte reale negativa, la (B.7) vale 0 per $\omega \ll |q|$, $\pi/2$ per $\omega = |q|$, e π per $\omega \gg |q|$. Se la singolarità sono con parte reale positiva, allora la (B.7) vale 2π per $\omega \ll |q|$, $3\pi/2$ per $\omega = |q|$ e π per $\omega \gg |q|$. La transizione tra i valori

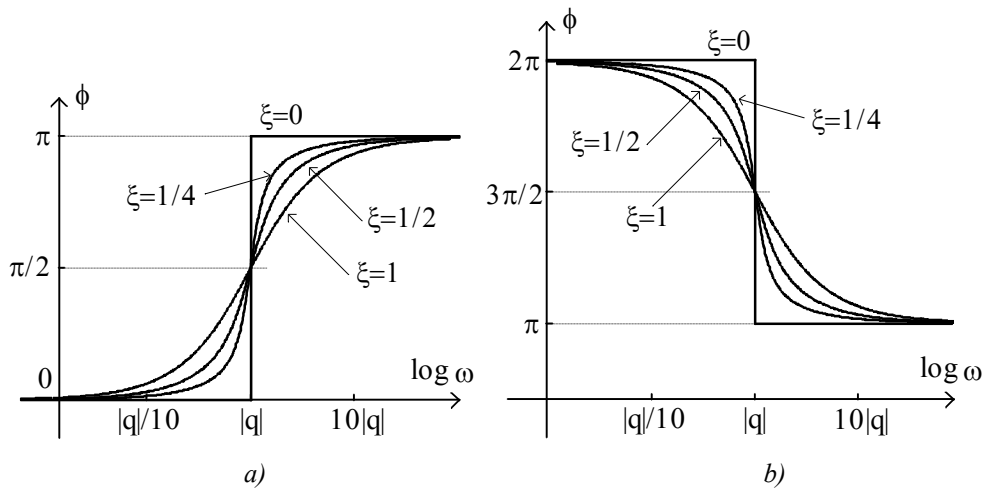
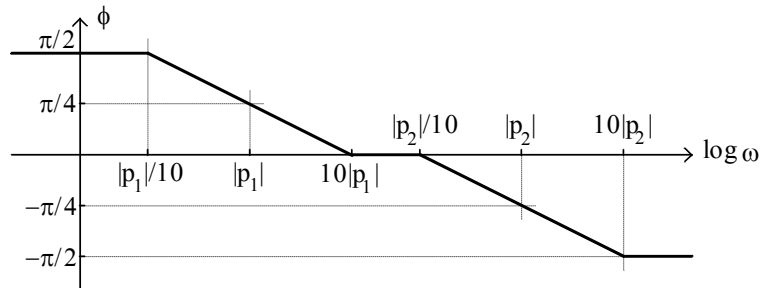


Fig. B.6 Sfasamento dovuto ad una coppia di singolarità complesse coniugate: a) singolarità con parte reale negativa; b) singolarità con parte reale positiva.

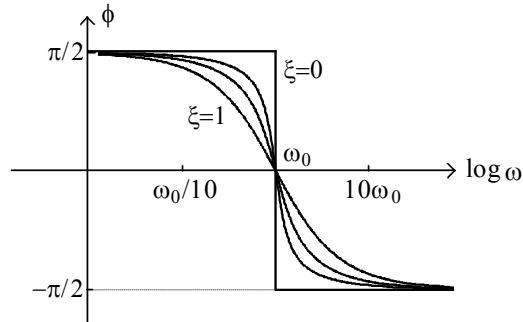
asintotici dipende dal fattore di forma ξ . Gli andamenti sono riportati in Fig.B.5. Sulla base degli andamenti in Fig. B.4 e B.5 ed applicando la (B.2), si possono ricavare i diagrammi degli sfasamenti delle reti.

E B.2 Ricavare il diagramma dello sfasamento per la rete dell'esercizio E A.10 al variare del valore della resistenza R.

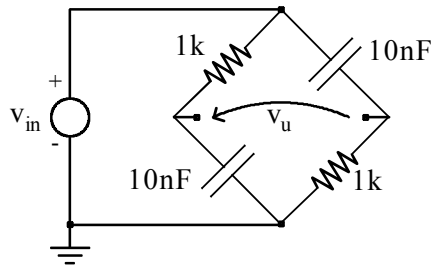
Nella figura successiva è riportato l'andamento dello sfasamento nel caso di poli reali distinti con parte reale negativa. Se i due poli distano più di una decade, lo sfasamento per $\omega \ll |p_1|$ è essenzialmente dovuto allo zero nell'origine ed è quindi pari a $\pi/2$. Per $\omega > |p_1|/10$, l'effetto del primo polo incomincia a farsi sentire. In base alla (B.2), lo sfasamento dei termini legati ai poli della rete va a sottrarsi al contributo dato dagli zeri. Quindi la fase diminuisce e per $\omega = |p_1|$ essa è pari a $\pi/4$. Per $\omega = |p_2|$ lo sfasamento totale è pari alla somma di $\pi/2$ dovuto allo zero, $-\pi/2$ dovuto al primo polo e $-\pi/4$ dovuto al secondo polo. Quindi, in totale, $\phi = -\pi/4$. Asintoticamente, lo sfasamento dovuto al secondo polo raggiunge $-\pi/2$ e quindi $\phi = -\pi/2$ per $\omega > 10|p_2|$.



Se i poli sono complessi coniugati, lo sfasamento per $\omega \ll \omega_0 = |p|$ è dovuto allo zero nell'origine e quindi è pari a $\pi/2$. Per $\omega > \omega_0/10$ si comincia a sentire l'effetto della coppia di poli. Per $\omega = \omega_0$ lo sfasamento totale è pari alla somma di $\pi/2$ dovuto allo zero, $-\pi/2$ dovuto alla coppia di poli; la fase ϕ è quindi nulla. A seconda del fattore di forma della coppia di poli la variazione della fase sarà più o meno graduale. Asintoticamente lo sfasamento dovuto alla coppia di poli vale $-\pi$ e quindi $\phi = -\pi/2$ per $\omega \gg \omega_0$.

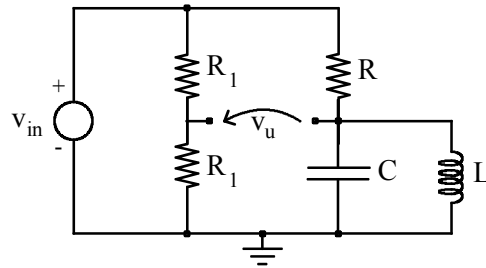


E B.3 Sia data la rete della figura. Tracciare i diagrammi del modulo e della fase della sua funzione di trasferimento.



Si noti che la rete ha un diagramma di $|T(j\omega)|$ piatto a seguito della coincidenza del valore assoluto del polo nel semipiano sinistro con quello dello zero nel semipiano destro. Reti elettriche con zeri nel semipiano destro sono dette a **sfasamento non minimo**, perché il loro contributo allo sfasamento totale è tale da sommarsi a quelli già presenti per effetto dei poli e zeri del semipiano sinistro. Come mai la rete ha un solo polo?

E B.4 Sia dato il circuito della figura seguente. Discutere come cambia la sua funzione di trasferimento al variare di R_1 ed R . Tracciare i corrispondenti diagrammi del modulo e della fase. Riportare in un grafico quotato l'andamento delle risposte al segnale a gradino $E \cdot I(t)$.



E B.5 Sia data la rete nella figura. Tracciare i diagrammi del modulo e della fase della sua funzione di trasferimento e disegnare la risposta al segnale a gradino $E \cdot 1(t)$.

